基 礎 統 計 学

第 4 回　多群の比較 — 分散分析と多重比較法

2016. 10. 28

分散分析

３つ以上の群（母集団）$\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m$, $m \geq 3$, があり，それらの母平均 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ を比較したいとする．このとき，

1. 帰無仮説 (H_0) : $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n$.
2. 対立仮説 (H_1) : 少なくとも１組の平均 μ_i, μ_j は異なる.

として行う検定が (一元配置) 分散分析（analysis of variance, ANOVA) である.

一元配置分散分析

一つの要因（因子）を考え，その状態(水準)の違いで比較する方法を一元配置分散分析という.
（要因が２つあるときは二元配置分散分析. ３つ以上のときは多元配置分散分析がある.）

分散分析の前提

要因 X が m 個の段階（水準）$X_1, \ldots, X_m$ に分かれているとする.

前提

- 各 X_i は正規分布に従う.
- 分散は互いに等しい（等分散性の仮定）

注

(1) t 検定と同じ条件．実際、$m = 2$ のときの分散分析は t 検定と同等である.
(2) 等分散性の検証は Bartlett 検定あるいは Levene 検定で可能.

データの表

Table: 表

群（水準）	サイズ	データ				計 T	平均 $\bar{X}_i$	分散 V_i
X_1	n_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n_1}	T_1	$\bar{x}_1$	V_1
X_2	n_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n_2}	T_2	$\bar{x}_2$	V_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_m	n_m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mn_m}	T_m	$\bar{x}_m$	V_m
計	N					T		

全データの平均は $\bar{x} = \frac{T}{N}$ である.

群間の偏差平方和

全データ平均 $\bar{x}$ との全データの偏差平方和を S_T とする.

$$S_T = \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x})^2$$

群間の偏差平方和 S_A を

$$S_A = \sum_{i=1}^{m} n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

と定める.

群内の偏差平方和

各群平均の差が大きくなると S_A も大きくなると考えられる.

群内の偏差平方和（誤差平方和）S_E を

$$
\begin{aligned}
S_E &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \\
&= (n_1 - 1)V_1 + \cdots + (n_m - 1)V_m
\end{aligned}
$$

とする.

自由度

定理：$S_T = S_A + S_E$ が成り立つ.

自由度と分散

- S_A の自由度 $\phi_A = m - 1$.
- S_E の自由度 $\phi_E = N - m$.
- S_T の自由度 $\phi_T = N - 1$.

分散

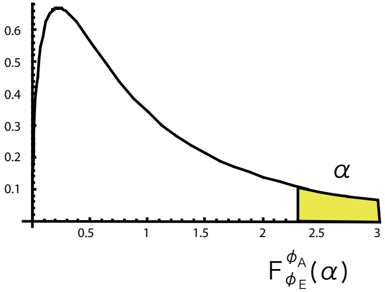
- $V_A = \dfrac{S_A}{\phi_A}$.
- $V_E = \dfrac{S_E}{\phi_E}$ (誤差分散)

分散比と F 分布

$F_0 = \dfrac{V_A}{V_E}$ とおく.

Fact

F_0 は自由度 (ϕ_A, ϕ_E) の F 分布に従う.



判定

- $F_0 > F_{\phi_E}^{\phi_A}(\alpha)$ のとき，
  $(H_0) : \mu_1 = \cdots = \mu_m$ は棄却
  したがってどれかの母平均 μ_i は他と異なる．
- $F_0 \leq F_{\phi_E}^{\phi_A}(\alpha)$ のとき $(H_0) : \mu_1 = \cdots = \mu_m$ は棄却できない．

EZR (R Commander) にて

1 群〜4 群についてのデータ ANOVA.csv を読み込んでおく.

1. 1〜4 の 4 群について箱ひげ図をみる.
   （グラフ → 箱ひげ図）
2. バートレットの等分散検定をする.
   （統計解析 → 連続変数の解析 → 3 群以上の等分散性の検定）
3. 1 元配置分散分析をする.
   （統計解析 → 連続変数の解析 → 3 群以上の間の

R にて

1. data < – read.csv(”ANOVA.csv”)
2. バートレットの等分散検定をする.

   bartlett.test(data$value ∼ data$Group)
3. 1 元配置分散分析をする.

   anova(aov(data$value ∼ data$Group))

補足 1

正規性や等分散性が満たされていないときには

分散分析のノンパラメトリック版である

Kruskal-Wallis 法

がある.

EZR: 統計解析 → ノンパラメトリック検定 →

3 群以上の間の比較

R: kruskal.test (list(data1, data2, data3,. . .))

補足2

2元配置分散分析（繰り返し有り）の場合，2つの要因 X, Y の効果および X,Y の交互作用（相乗効果）$X \times Y$ が検定できる．

EZR: （統計解析 → 連続変数の解析 →

複数の因子での平均値の比較）

多重比較の問題

さて，４つの母集団の母平均はすべて等しいという帰無仮説は棄却された.

つまり，どれかは他と異なる母平均をもつことはわかる.

問題

それではどの２つの母平均が異なるのか？

分散分析はこの問いに答えられない,

t 検定の誤用

２つの母平均の比較には t 検定を用いた.

そこで，すべての群の中から２つをとり，t 検定を繰り返せばよいように思えるが,

これはしてはいけない！！
何故か？

理由

母集団が４つなら全部で ${}_4C_2 = 6$ 通りの組み合わせについて t 検定を繰り返すことになる.

１回の t 検定の信頼性が 95% とすると，それを６回繰り返して得られる結論の信頼性は

$$0.95^6 \times 100\% = 73.5\%$$

となり，統計の信頼度が落ちるため.

このように同じデータから同じ検定を繰り返せば結論の信頼性は低くなる.

多重比較法—Bonferroni の方法

このような難点を回避するするために様々な多重比較法が考案されている.

Bonferroni 法

t 検定を繰り返しても 95% の信頼性を確保するために, 1 回の t 検定の有意水準をより小さくして行うやり方.

$(1-\alpha)^n \fallingdotseq 1 - n\alpha$ であるから，有意水準を α/n とすれば n 回繰り返たときの有意水準は約 α となる.

例

$n = 6$, $\alpha = 0.05$ ならば $0.05 \div 6 = 0.0083$ を有意水準として t 検定を行えばよい.

多重比較法—Holm の方法

Bonferroni 法は適用範囲は広いが，繰り返しの回数 n が大きい場合，α/n は非常に小さくなり，有意差が出にくくなる．（つまり検出力が低下する．）

Bonferroni 法を改良した方法に Holm 法がある．

多重比較法—Holmの方法

t 検定を有意水準 α で n 回繰り返し，得られた p 値（ソフトが出力してくれる）を小さい順に並べたものを

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_n$$

とする.

手順

1. $p_1 < \alpha/n$ なら p_1 は有意とする.
2. $p_2 < \alpha/(n-1)$ なら p_2 は有意とする.
3. $p_3 < \alpha/(n-2)$ なら p_3 は有意とする.

以下同様

4. $p_k \geq \alpha/(n-k+1)$ となった時点で，$p_k, \ldots, p_n$ はすべて有意でないとする.

多重比較法—Tukey-Kramer の方法

m 群のすべての２つの組み合わせ（$\frac{m(m-1)}{2}$ 通りある）を比較する方法

前提

- 各群は正規分布に従う．
- 分散は等しい

EZR (R Commander) にて

ANOVA.csv を開く.

Tukey-Kramer の方法で調べる.

（統計解析 → 連続変数の解析 → 3 群以上の間の平均値の比較）

で 2 組ずつの比較 (Tukey の多重比較) をチェックしておく.（Bonferroni, Holm 法も選択できる.）

EZR (R Commander) にて — 結果

同時信頼区間が表示され,

いずれも

1 群と 3 群，1 群と 4 群　に差があるとの結果

多重比較法—Dunnet の方法

すべての組を比較するのではなく，対照群 X_1 と他の処理群 $X_2, \ldots, X_m$ のそれぞれととの対比較の場合（$m-1$ 通りの組み合わせがある），Dunnet の方法がある．

多重比較法—ノンパラメトリックな方法

正規性の前提が満たされないときはノンパラメトリック法で検定を行う.

前提

- 各群の分布は同じ形状であることを仮定する
- 各群のサイズは大きいとする (各群 10 以上の大標本)

ノンパラメトリックな方法

- すべての対比較・・・Steel-Dwass の方法など
- 対照群と複数の処理群との対比較・・・Steel の方法など

http://aoki2.si.gunma-u.ac.jp/R/ にこれらを実行する R の関数が定義されている.

多重比較法の参考書

永田、吉田「統計的多重比較法の基礎」サイエンティスト社